

# ***La penale per estinzione anticipata di un mutuo: la sua considerazione nel tasso da confrontare con il TSU***



***Marina di Carrara***

***29 marzo 2019***

---

***Antonio Annibali Carla Barracchini***

***Una risposta scientifica al problema mediante  
una verifica numerica e una dimostrazione  
algebrica***

*Antonio e Alessandro Annibali, Carla Barracchini, Francesco Olivieri  
[www.attuariale.eu](http://www.attuariale.eu)*



## *Premessa*

---

*Nel presente articolo verrà affrontato il problema di come valutare, in modo coerente con i principi della Matematica Finanziaria, l'onere relativo alla **penale per estinzione anticipata di un mutuo**, per il quale sia previsto un processo di ammortamento "**alla francese**" con tasso fisso. Il calcolo sarà effettuato sia nel regime finanziario della capitalizzazione composta (**CC**) che nel regime della capitalizzazione semplice<sup>#</sup> (**CS**) ( <sup>#</sup> con epoca di equivalenza finale).*



## *Premessa*

---

*Dall'esame di diverse Consulenze Tecniche d'Ufficio o di Parte è risultata frequente, per la verifica del superamento "ab origine" del TSU (**Tasso Soglia d'Usura**) vigente all'epoca della stipula del contratto di mutuo, l'adozione dell'ipotesi di considerare la misura della penale per estinzione anticipata come un tasso additivo da inserire nel calcolo del TEG.*



## *Premessa*

---

*Poiché detta misura della penale si presenta nella forma di **aliquota** (e non già di **tasso**), in quanto commisurata all'importo del debito residuo da estinguere, senza la considerazione dell'ampiezza degli intervalli di tempo intercorrenti tra la data di eventuale estinzione anticipata e le date di scadenza delle singole rate, è evidente che l'ipotesi additiva sopra indicata risulta non accettabile, sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista pratico, ed è pertanto indispensabile definire un algoritmo che consenta di ricavare da tale aliquota una misura **dimensionalmente coerente** con le altre componenti partecipanti alla definizione del TFC*



## *Premessa*

---

*Dal punto di vista operativo, il procedimento per realizzare l'algoritmo sopra richiamato si compone delle seguenti fasi:*

- stesura del piano di ammortamento nel regime finanziario adottato,*
- calcolo dell'importo della **penale** per i diversi tempi di possibile estinzione anticipata,*
- calcolo del valore attualizzato (al tempo iniziale) degli importi indicati al punto precedente,*
- calcolo del valore attualizzato medio, ossia dell'**onere iniziale medio**,*



## *Premessa*

---

- *calcolo del **TIR** relativo al cash-flow del mutuo, tenendo conto di detto onere iniziale medio,*
- *confronto (differenza) tra il TIR ottenuto e il tasso periodale fissato per il mutuo (e estensione di tale confronto ai tassi annui nominali ed effettivi).*

*L'ultimo risultato rappresenta il tasso additivo per estinzione anticipata (conseguente alla presenza dell'aliquota-penale) partecipante alla formazione del TEG: è evidente che, in presenza di altre spese iniziali o periodiche, la differenza prima indicata ingloberà in un unico valore le varie spese, comprendendo quindi anche l'onere iniziale medio per estinzione anticipata,*



## *Esempio*

---

*Quanto sopra indicato, sarà di seguito sviluppato in forma teorica e con un **esempio numerico**, sia nel regime della capitalizzazione composta che nel regime della capitalizzazione semplice, con due distinte formule per il calcolo dell'onere iniziale medio:*

<i>Capitale</i>	$D = 280,000.00$
<i>TAN (Tasso Annuo Nominale)</i>	$j_{12} = 3.65\%$
<i>Frazionamento (mensile)</i>	$m = 12$
<i>Durata mensili</i>	$n = 360 \text{ rate}$
<i>Penale</i>	$w = 4.00\%$



## *Esempio*

---

*TPE (Tasso Periodale Effettivo)*

$$i_{1/12} = j_{12}/12 = 0.304167\%$$

*TAE (Tasso Annuo Effettivo) in CC*

$$i = (1 + i_{1/12})^{12} - 1 = 3.711685\%$$

*TAE (Tasso Annuo Effettivo) in CS*

$$j^{CS} = 1 + 12 * i_{1/12} - 1 = j_{12} = 3.65\%$$

*Rata mensile in CC*

$$R = 1,280.89$$

*Rata mensile in CS*

$$R^{CS} = 1,053.99$$





## *Rate di ammortamento*

---

$$R = \frac{Dr_{\overline{n}|i_{\frac{1}{12}}}}{s_{\overline{n}|i_{\frac{1}{12}}}} = \frac{D}{a_{\overline{n}|i_{\frac{1}{12}}}} = \frac{Di_{\frac{1}{12}}}{1 - \left(1 + i_{\frac{1}{12}}\right)^{-n}} = 1,280.89$$

$$R^{cs} = \frac{Dr_{\overline{n}|i_{\frac{1}{12}}}^{cs}}{s_{\overline{n}|i_{\frac{1}{12}}}^{cs}} = \frac{D \left(1 + ni_{\frac{1}{12}}\right)}{n \left(1 + \frac{n-1}{2}i_{\frac{1}{12}}\right)} = 1,053.99$$



## *Piano di ammortamento in CC*

---

*Quote interessi, Quote capitale, Debiti residui ( $k=1\dots n$ )*

$$I_k = D_{k-1} i \frac{1}{12} \quad , \quad C_k = R - I_k \quad ,$$

$$D_k = D_{k-1} - C_k \quad \left( = R a_{\overline{n-k}|i \frac{1}{12}} \right)$$

## Piano di ammortamento in CC

<i>Tempi</i>	<i>Rata</i>	<i>Interessi</i>	<i>Capitale</i>	<i>Debito</i>
0				280,000.00
1	1,280.89	851.67	429.22	279,570.78
2	1,280.89	850.36	430.53	279,140.25
3	1,280.89	849.05	431.84	278,708.42
4	1,280.89	847.74	433.15	278,275.27
5	1,280.89	846.42	434.47	277,840.80
178	1,280.89	546.14	734.75	178,817.69
179	1,280.89	543.90	736.98	178,080.71
180	1,280.89	541.66	739.22	177,341.48
181	1,280.89	539.41	741.47	176,600.01
182	1,280.89	537.16	743.73	175,856.28
355	1,280.89	23.13	1,257.76	6,346.41
356	1,280.89	19.30	1,261.58	5,084.82
357	1,280.89	15.47	1,265.42	3,819.40
358	1,280.89	11.62	1,269.27	2,550.13
359	1,280.89	7.76	1,273.13	1,277.00
360	1,280.89	3.88	1,277.00	0.00



## *Fattori di attualizzazione in CC*

---

*Fattori di attualizzazione ( $k=0\dots n-1$ )*

$$f_k = \left(1 + i_{\frac{1}{12}}\right)^{-k} = v_{\frac{1}{12}}^k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_{\frac{1}{12}}^k = \ddot{a}_{n|i_{\frac{1}{12}}} = r_{\frac{1}{12}} \frac{1 - v_{\frac{1}{12}}^n}{i_{\frac{1}{12}}} = 219.263461$$



## *Penali in CC*

---

*Importi delle penali ( $k=0\dots n-1$ )*

$$P_k = D_k w = R w a_{\overline{n-k}|i_{\frac{1}{12}}} = \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left(1 - v_{\frac{1}{12}}^{n-k}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} P_k = \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - v_{\frac{1}{12}}^{n-k}\right) = \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left(n - a_{\overline{n}|i_{\frac{1}{12}}}\right) = 2,381,842.03$$



## *Penali attualizzate in CC*

---

*Importi delle penali attualizzate ( $k=0\dots n-1$ )*

$$P_k f_k = \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left(1 - v_{\frac{1}{12}}^{n-k}\right) v_{\frac{1}{12}}^k = \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left(v_{\frac{1}{12}}^k - v_{\frac{1}{12}}^n\right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} P_k f_k &= \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(v_{\frac{1}{12}}^k - v_{\frac{1}{12}}^n\right) = \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left(\ddot{a}_{n|i_{\frac{1}{12}}} - n v_{\frac{1}{12}}^n\right) \\ &= \mathbf{1,661,357.97} \end{aligned}$$

## Penali medie in CC

Importo medio delle penali (1 = media dei valori attualizzati, 2 = media attualizzata dei valori)

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P_k f_k}{n} = \frac{\frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left( \ddot{a}_{n|i_{\frac{1}{12}}} - n v_{\frac{1}{12}}^n \right)}{n} = \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left( \frac{\ddot{a}_{n|i_{\frac{1}{12}}}}{n} - v_{\frac{1}{12}}^n \right)$$

$$= 4,614.88$$

$$\bar{\bar{P}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P_k f_k}{\sum_{k=0}^{n-1} f_k} = \frac{\frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left( \ddot{a}_{n|i_{\frac{1}{12}}} - n v_{\frac{1}{12}}^n \right)}{\ddot{a}_{n|i_{\frac{1}{12}}}} = \frac{Rw}{i_{\frac{1}{12}}} \left( 1 - \frac{n}{\ddot{s}_{n|i_{\frac{1}{12}}}} \right)$$

$$= 7,576.99$$



## Cash-Flow in CC

---

*Cash-Flow (1 = media dei valori attualizzati, 2 = media attualizzata dei valori)*

$$\overline{\text{CF}} = \left\{ -D + \overline{\text{P}}; \underbrace{\text{R} \dots \text{R}}_{k=1\dots n} \right\} = \left\{ \underbrace{-280,000.00 + 4,614.88}_{-275,385.12}; \underbrace{1,280.89}_{k=1\dots n} \right\}$$

$$\overline{\overline{\text{CF}}} = \left\{ -D + \overline{\overline{\text{P}}}; \underbrace{\text{R} \dots \text{R}}_{k=1\dots n} \right\} = \left\{ \underbrace{-280,000.00 + 7,576.99}_{-272,423.01}; \underbrace{1,280.89}_{k=1\dots n} \right\}$$



## Calcoli in CC

<i>Tempi</i>	<i>Fatt. att.</i>	<i>Penale</i>	<i>Penale att.</i>	<i>CashFlow1</i>	<i>Cashflow2</i>
0	1.000000	11,200.00	11,200.00	-275,385.12	-272,423.01
1	0.996968	11,182.83	11,148.92	1,280.89	1,280.89
2	0.993944	11,165.61	11,097.99	1,280.89	1,280.89
3	0.990930	11,148.34	11,047.22	1,280.89	1,280.89
4	0.987925	11,131.01	10,996.61	1,280.89	1,280.89
5	0.984929	11,113.63	10,946.14	1,280.89	1,280.89
178	0.582402	7,152.71	4,165.75	1,280.89	1,280.89
179	0.580636	7,123.23	4,136.00	1,280.89	1,280.89
180	0.578875	7,093.66	4,106.34	1,280.89	1,280.89
181	0.577119	7,064.00	4,076.77	1,280.89	1,280.89
182	0.575369	7,034.25	4,047.29	1,280.89	1,280.89
355	0.340223	253.86	86.37	1,280.89	1,280.89
356	0.339192	203.39	68.99	1,280.89	1,280.89
357	0.338163	152.78	51.66	1,280.89	1,280.89
358	0.337138	102.01	34.39	1,280.89	1,280.89
359	0.336115	51.08	17.17	1,280.89	1,280.89
360	0.000000	0.00	0.00	1,280.89	1,280.89
	<u>Somma pesi</u>	<i>Totale</i>	<i>Totale</i>	<i>Caso1</i>	<i>Caso2</i>
	219.263461	2,381,842.03	1,661,357.97	4,614.88	7576.99



## *Tassi periodali effettivi globali in CC*

*TPEG (periodico effettivo) (1 = media dei valori attualizzati, 2 = media attualizzata dei valori)*

$$\mathbf{D - \bar{P} = Ra_{n|i_{\frac{1}{12}}^{[1]}} ; \quad \frac{\mathbf{D - \bar{P}}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{1 - \left(1 + i_{\frac{1}{12}}^{[1]}\right)^{-n}}}{i_{\frac{1}{12}}^{[1]}} \Rightarrow i_{\frac{1}{12}}^{[1]}}$$
$$= \mathbf{0.315449\%}$$

$$\mathbf{D - \bar{\bar{P}} = Ra_{n|i_{\frac{1}{12}}^{[2]}} ; \quad \frac{\mathbf{D - \bar{\bar{P}}}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{1 - \left(1 + i_{\frac{1}{12}}^{[2]}\right)^{-n}}}{i_{\frac{1}{12}}^{[2]}} \Rightarrow i_{\frac{1}{12}}^{[2]}}$$
$$= \mathbf{0.322838\%}$$



## *Tassi annui nominali globali in CC*

*TANG (annuo nominale) (1 = media dei valori  
attualizzati, 2 = media attualizzata dei valori)*

$$j_{12}^{[1]} = 12 i_{\frac{1}{12}}^{[1]} = 3.785383\% \quad (= \underbrace{3.65\%}_{j_{12}} + \underbrace{0.135383\%}_{j_{12}^{[1]} - j_{12}})$$

$$j_{12}^{[2]} = 12 i_{\frac{1}{12}}^{[2]} = 12 \cdot 0.322838\% = 3.874055\% \\ (= \underbrace{3.65\%}_{j_{12}} + \underbrace{0.224055\%}_{j_{12}^{[2]} - j_{12}})$$



## *Tassi annui effettivi globali in CC*

*TAE<sub>G</sub> (annuo effettivo) (1 = media dei valori attualizzati, 2 = media attualizzata dei valori)*

$$\begin{aligned} i^{[1]} &= \left(1 + i_{\frac{1}{12}}^{[1]}\right)^{12} - 1 = 3.851753\% \left( \right. \\ &= \underbrace{3.711685\%}_i + \underbrace{0.140069\%}_{i^{[1]}-i} \left. \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^{[2]} &= \left(1 + i_{\frac{1}{12}}^{[2]}\right)^{12} - 1 = 1.00322838^{12} - 1 = 3.943589\% \\ &= \underbrace{3.711685\%}_i + \underbrace{0.231904\%}_{i^{[2]}-i} \end{aligned}$$



## Tassi in CC

	<i>Caso1 = .../n</i>		<i>Caso2 = .../<u>Somma pesi</u></i>	
	<i>Tassi</i>	<i># base</i>	<i>Tassi</i>	<i># base</i>
<u>TAEG.Pen</u> >>	3.851753%	0.140069%	3.943589%	0.231904%
<u>TANG.Pen</u> >>	3.785383%	0.135383%	3.874055%	0.224055%
<u>TPEG.Pen</u> >>	0.315449%	0.011282%	0.322838%	0.018671%



## *Tassi periodali effettivi globali in CS*

*TPEG<sup>CS</sup> (periodico effettivo) (1 = media dei valori attualizzati, 2 = media attualizzata dei valori)*

$$\begin{aligned} D - \bar{P}^{CS} &= R^{CS} \frac{S \frac{CS}{n} i_{\frac{1}{12}}^{CS[1]}}{r \frac{CS}{n} i_{\frac{1}{12}}^{CS[1]}} = R^{CS} \frac{n \left( 1 + \frac{n-1}{2} i_{\frac{1}{12}}^{CS[1]} \right)}{1 + n i_{\frac{1}{12}}^{CS[1]}} \Rightarrow i_{\frac{1}{12}}^{CS[1]} \\ &= 0.337749\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D - \bar{\bar{P}}^{CS} &= R^{CS} \frac{S \frac{CS}{n} i_{\frac{1}{12}}^{CS[2]}}{r \frac{CS}{n} i_{\frac{1}{12}}^{CS[2]}} = R^{CS} \frac{n \left( 1 + \frac{n-1}{2} i_{\frac{1}{12}}^{CS[2]} \right)}{1 + n i_{\frac{1}{12}}^{CS[2]}} \Rightarrow i_{\frac{1}{12}}^{CS[2]} \\ &= 0.350529\% \end{aligned}$$

## *Tassi annui nominali-effettivi globali in CS*

*TANG<sup>CS</sup> = TAEG<sup>CS</sup> (annuo nominale/effettivo) (1 = media dei valori attualizzati, 2 = media attualizzata dei valori)*

$$\mathbf{i^{cs[1]} = j_{12}^{cs[1]} = 12 \mathbf{i_{\frac{1}{12}}^{cs[1]} = 12 \cdot 0.337749\% = 4.052994\%}$$
$$\mathbf{(= 3.65\% + 0.402994\%)}$$

$$\mathbf{i^{cs[2]} = j_{12}^{cs[2]} = 12 \mathbf{i_{\frac{1}{12}}^{cs[2]} = 12 \cdot 0.350529\% = 4.206352\%}$$
$$\mathbf{(= 3.65\% + 0.556352\%)}$$



## Tassi in CS

---

	<i>Caso1 = .../n</i>		<i>Caso2 = .../<u>Somma_pesi</u></i>	
	<i>Tassi</i>	<i># base</i>	<i>Tassi</i>	<i># base</i>
<u>TANG.Pen</u> >>	4.052994%	0.402994%	4.206352%	0.556352%
<u>TPEG.Pen</u> >>	0.337749%	0.033583%	0.350529%	0.046363%



# ***La penale per estinzione anticipata di un mutuo: la sua considerazione nel tasso da confrontare con il TSU***



***Marina di Carrara***

***29 marzo 2019***

---

***Una risposta scientifica al problema mediante una verifica numerica e una dimostrazione algebrica***

*Antonio e Alessandro Annibali, Carla Barracchini, Francesco Olivieri*  
*[www.attuariale.eu](http://www.attuariale.eu)*